Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 03, No. 3 (2014), hal 227 – 234.

KONSTRUKSI PELABELAN SISI AJAIB SUPER PADA GRAF ULAT

Okki Darmawan, Nilamsari Kusumastuti, Yundari

INTISARI

Graf ulat adalah sebuah tree yang jika semua simpul berderajat satu dibuang akan membentuk satu path yang menghubungkan semua simpul yang tersisa. Pelabelan sisi ajaib super pada suatu graf G dengan p simpul dan q sisi adalah fungsi bijektif dari V(G) ∪ E(G) ke {1, 2, ..., p+q} dan memenuhi f(V(G))={1, 2,..., p} dan f(E(G))={p+1, p+2,..., p+q} serta terdapat bilangan ajaib k=f(x)+f(xy)+f(y) dengan xy adalah sebarang sisi. Graf sisi ajaib super adalah graf yang memiliki sebuah pelabelan sisi ajaib super [1]. Berbagai hasil penelitian telah menyebutkan bahwa beberapa jenis graf termasuk graf ulat adalah graf sisi ajaib super, namun penelitian tersebut tidak menyertakan bukti berupa fungsi bijektif yang dikonstruksi. Pada penelitian ini dikonstruksikan fungsi bijektif yang berupa pelabelan sisi ajaib super pada graf ulat. Graf ulat I_n adalah graf yang mempunyai 2n simpul berderajat satu dan path utama sepanjang n-1 dengan n bilangan asli. Pengkonstruksian fungsi dilakukan dengan membagi menjadi dua kasus, yaitu kasus pada n bilangan asli ganjil dan n bilangan asli genap. Fungsi label simpul untuk n bilangan asli ganjil berbeda dengan fungsi label simpul untuk n bilangan asli genap, sedangkan untuk fungsi label sisi berlaku untuk semua n bilangan asli.

Kata Kunci : *graf, pelabelan sisi ajaib super*

PENDAHULUAN

Graf $G(V,E)$ adalah pasangan dua himpunan, yaitu himpunan semua simpul-simpul di G yang tidak kosong, $(V(G))$, dan himpunan semua sisi-sisi di G yang boleh kosong, $(E(G))$. Sisi berbentuk garis yang menghubungkan dua buah simpul. Jika sebuah graf hanya memiliki satu simpul, maka graf tersebut tidak memiliki sisi. Banyaknya simpul pada suatu graf disebut orde, sedangkan banyaknya sisi pada suatu graf disebut ukuran. Sebarang sisi dikatakan *incident* jika menghubungkan dua buah simpul. Sisi yang *incident* dengan satu simpul disebut *loop*. Derajat suatu simpul adalah banyaknya sisi yang *incident* dengan simpul tersebut.

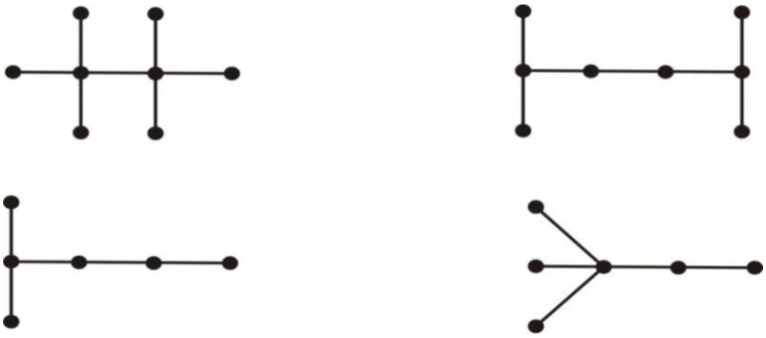
Pelabelan pada graf pertama diperkenalkan pada tahun 1960. Pelabelan pada graf adalah suatu fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (simpul atau sisi) dengan angka (umumnya bilangan bulat positif) [2]. Pelabelan total sisi ajaib pada suatu graf dengan p simpul dan q sisi adalah fungsi bijektif f dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1,2,\dots,p+q\}$ dan untuk setiap sisi xy berlaku $f(x)+f(xy)+f(y)=k$, dengan k adalah bilangan ajaib. Sedangkan pelabelan sisi ajaib super adalah pelabelan total sisi ajaib yang himpunan simpulnya berlabel $\{1,2,\dots,p\}$, dengan $p=|V(G)|$ [3].

Berbagai hasil penelitian telah menyebutkan bahwa beberapa jenis graf seperti graf *cycle*, graf *complete*, graf *path*, graf *tree*, maupun graf ulat adalah graf sisi ajaib super tanpa menyertakan bukti fungsi bijektif yang dikonstruksi. Oleh karena itu peneliti bermaksud untuk membuktikan bahwa graf ulat yang mempunyai 2n simpul berderjat satu, dan *path* utama sepanjang *n-1* dengan n bilangan asli merupakan graf sisi ajaib super dengan menyertakan fungsi bijektif yang dikonstruksi.

Graf ulat yang mempunyai 2n simpul berderjat satu, dan *path* utama sepanjang *n-1* dengan n bilangan asli disimbolkan dengan I_n ditentukan banyak sisi dan simpulnya masing-masing $|V(I_n)|$ dan $|E(I_n)|$. *Path* utama adalah sebuah *path* yang terbentuk dari graf ulat yang semua simpul berderajat satunya dibuang. Langkah selanjutnya adalah menyusun algoritma pelabelan sisi ajaib super untuk graf ulat I_n yang setelah itu diimplementasikan ke dalam program. Program tersebut menampilkan semua kemungkinan pelabelan yang terjadi. Setelah semua kemungkinan pelabelan ditampilkan selanjutnya dipilih salah satu pelabelan yang memiliki fungsi barisan pelabelan, hal ini dimaksudkan agar fungsi bijektif dari pelabelan sisi ajaib super pada graf ulat I_n dapat dikonstruksikan. Kemudian didefinisikan fungsi f dari $V(I_n) \cup E(I_n)$ ke $\{1, 2, \ldots, |V(I_n)| + |E(I_n)|\}$. Karena pelabelan merupakan fungsi bijektif, maka perlu ditunjukkan f merupakan fungsi bijektif. Selanjutnya menentukan bilangan ajaib k yaitu $k = f(x) + f(xy) + f(y)$. Selain itu, perlu ditunjukkan bahwa f memetakan $V(I_n)$ ke $\{1,2, \ldots, |V(I_n)|\}$ untuk membuktikan pelabelan tersebut merupakan pelabelan sisi ajaib super. Jika graf ulat I_n memiliki pelabelan sisi ajaib super, maka graf ulat tersebut merupakan graf sisi ajaib super.

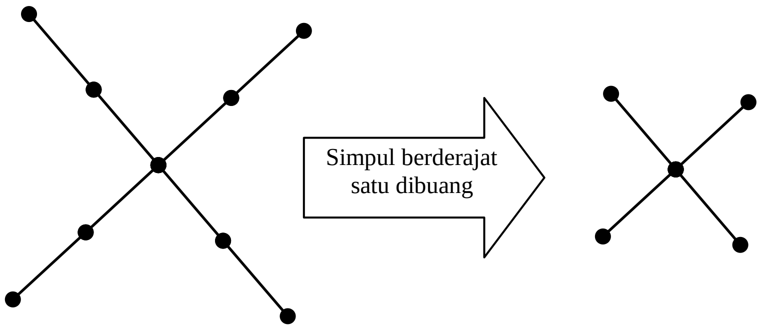
GRAF ULAT

Sebuah graf yang tidak mengandung *cycle* disebut asiklik, dan graf asiklik terhubung disebut pohon (*tree*). *Tree* adalah suatu graf terhubung yang tidak memiliki *loop* dan *circuit*. Graf ulat adalah sebuah *tree* yang jika semua simpul berderajat satu dibuang akan membentuk *path* [1]. Bentuk dari graf ulat ada bermacam-macam, ada yang berbentuk H, T, maupun berbentuk trisula. Berikut beberapa contoh graf ulat.



Gambar 1. Contoh Graf Ulat

Tidak semua *tree* adalah graf ulat, ada beberapa graf yang termasuk dalam *tree* namun graf tersebut bukanlah graf ulat. Contohnya graf berikut.



Gambar 2. Contoh *Tree* yang Bukan Graf Ulat

Graf pada Gambar 2 merupakan *tree*, namun graf tersebut bukan graf ulat. Karena jika semua simpul berderjat satu dari graf tersebut dibuang, maka graf tersebut tidak membentuk *path* tetapi masih membentuk *tree*.

Membentuk sebuah graf ulat termasuk dalam permasalahan NP-*complete*. NP-*complete* adalah salah satu algoritma *Non Polynomial* (NP). Algoritma *Non Polynomial* adalah algoritma yang kompleksitas waktu kasus terburuknya tidak dibatasi oleh fungsi polinom dari ukuran masukannya. Graf ulat dapat dibentuk dari beberapa simpul, khususnya dengan simpul $n \geq 3$. Simpul sebanyak $n \geq 3$ dapat membentuk graf ulat sebanyak $2^{n-4} + 2^{\lfloor (n-4)/2 \rfloor}$ dengan $\lfloor (n-4)/2 \rfloor$ adalah fungsi lantai (*floor function*) yaitu fungsi pembulatan ke bawah atau pembulatan kearah $-\infty$. Sedangkan untuk 1 dan 2 simpul hanya dapat membentuk satu graf ulat.

Graf ulat digunakan pada teori graf khususnya di bidang kimia, yaitu untuk merepresentasikan struktur dari molekul *benzenoid hydrocarbon*. Didalam konteks graf di bidang kimia, graf ulat dikenal sebagai *benzenoid trees* atau *gutman trees* [4]. Pada tahun 2004 *National Surgical Quality Improvement Program* (NSQIP) menggunakan aplikasi graf ulat untuk membantu menurunkan kadar rasa sakit pada proses anestesi.

FUNGSI MONOTON

Suatu fungsi *f* pada suatu interval disebut monoton naik jika untuk sebarang x_1 dan x_2 pada interval tersebut berlaku $x_2 > x_1$ maka $f(x_2) \geq f(x_1)$ atau $f(x_2) > f(x_1)$. Pada kasus pertama, fungsi tersebut disebut monoton naik (atau tidak turun), sedangkan pada kasus kedua disebut naik tegas. Suatu fungsi disebut monoton turun jika $x_2 > x_1$ maka $f(x_2) \leq f(x_1)$ atau $f(x_2) < f(x_1)$ [5].

Fungsi yang monoton tegas merupakan fungsi bijektif. Sehingga untuk membuktikan suatu fungsi bijektif cukup ditunjukkan bahwa fungsi tersebut monoton tegas, seperti dinyatakan dalam lemma berikut.

Lemma 1 *Jika f monoton tegas pada daerah asalnya, maka f fungsi bijektif*

Bukti:

(i) Akan ditunjukkan bahwa *f* fungsi injektif
Diketahui *f* monoton tegas, dengan kata lain $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
Karena $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, maka *f* merupakan fungsi injektif.

(ii) Akan ditunjukkan bahwa *f* fungsi surjektif
Surjektif artinya $f(A) = B$, yang ekuivalen dengan $f(A) \subseteq B$ dan $B \subseteq f(A)$
Jelas $f(A) \subseteq B$ karena daerah hasil dari fungsi *f* haruslah berada di B
Untuk $B \subseteq f(A)$, misalkan $\exists b \in B$ dan $b \notin f(A)$
Maka $\exists x_1, x_2 \in A$, sedemikian sehingga $f(x_1) < b < f(x_2)$
Untuk $\lim_{x \to x_1} x = c = \lim_{x \to x_2} x$, dengan $x_1 \neq c \neq x_2$
Maka $\lim_{x \to x_1} f(x) = \lim_{x \to x_2} f(x) = f(c)$
Menurut teorema apit, jika $f(c) < b < f(c)$ maka $b = f(c)$
Sehingga $\exists c \in A \ni f(c) = b$
Jadi $b \in f(A)$, hal ini kontradiksi (berlawanan) bahwa $b \notin f(A)$
Karena jika $b \in B$ maka $b \in f(A)$, sehingga $B \subseteq f(A)$
Selanjutnya karena $f(A) \subseteq B$ dan $B \subseteq f(A)$, maka $f(A) = B$
Jadi *f* merupakan fungsi surjektif.

Berdasarkan (i) dan (ii) maka terbukti bahwa jika *f* monoton tegas maka *f* merupakan fungsi bijektif. ■

KONSTRUKSI PELABELAN SISI AJAIB SUPER

Pelabelan total sisi ajaib pada suatu graf dengan orde *p* dan ukuran *q* adalah fungsi bijektif *f* dari $V \cup E$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, p+q\}$ sehingga untuk masing-masing sisi *xy* di G berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, dengan *k* adalah bilangan ajaib.

Definisi 2 [2] *Pelabelan total sisi ajaib pada graf G adalah fungsi bijektif f dari* $V(G) \cup E(G)$ *ke bilangan bulat* $1, 2, \ldots, v+e$, *dimana* $v = |V(G)|$ *dan* $e = |E(G)|$, *dan diberikan sebarang sisi (xy)*

$$f(x) + f(xy) + f(y) = k$$

dengan $f(x) + f(xy) + f(y)$ *disebut penjumlahan sisi (xy), dan k adalah bilangan ajaib dari penjumlahan sisi di G.*

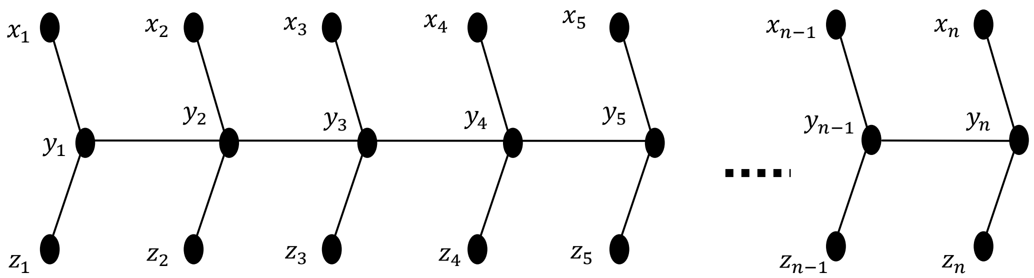
Pelabelan total sisi ajaib dapat dimaknai bahwa jumlah label suatu sisi dan label simpul yang terhubung langsung dengan sisi tersebut adalah sama, untuk semua sisi [6].

Definisi 3 [3] *Misalkan graf G dengan p simpul dan q sisi, serta G memiliki pelabelan total sisi ajaib f. Jika* $f\big(V(G)\big) = \{1,2,\dots,p\}$ *dan* $f\big(E(G)\big) = \{p+1, p+2, \dots, p+q\}$ *maka f disebut pelabelan sisi ajaib super.*

Graf sisi ajaib super adalah graf yang memiliki sebuah pelabelan sisi ajaib super [1]. Pada Gambar 3, (a) adalah pelabelan total sisi ajaib dan (b) adalah pelabelan sisi ajaib super. Bilangan ajaib untuk (a) adalah 10, sedangkan bilangan ajaib untuk (b) adalah 9. Perhatikan (b), simpul dipetakan pada himpunan $\{1, 2{,}3\}$, dengan demikian (b) disebut pelabelan sisi ajaib super.

Gambar 3. Contoh Pelabelan Total Sisi Ajaib dan Pelabelan Sisi Ajaib Super

Penelitian ini membuktikan bahwa graf ulat yang mempunyai 2*n* simpul berderjat satu, dan *path* utama sepanjang *n-1* dengan n bilangan asli disimbolkan dengan I_n adalah graf sisi ajaib super. Adapun bentuk dari graf ulat I_n dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 4. Graf Ulat yang Mempunyai 2*n* Simpul Ujung dan *Path* Utama Sepanjang *n-1* dengan *n* Bilangan Asli

Berdasarkan Gambar 4, dibentuk himpunan bagian simpul $V(I_n)$ pada I_n sebagai berikut

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$$
$$Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$$
$$Z = \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_n\}$$

sehingga

$$V(I_n) = X \cup Y \cup Z.$$

Himpunan sisi $E(I_n)$ pada I_n sebagai berikut

$$E(I_n) = \{x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n, y_1y_2, y_2y_3, \dots, y_{n-1}y_n, z_1y_1, z_2y_2, \dots, z_ny_n\}$$

sehingga dapat diperoleh orde atau banyaknya simpul dari I_n adalah

$$p(I_n) = |V(I_n)| = 3n,$$

dan ukuran atau banyaknya sisi dari I_n adalah

$$q(I_n) = |E(I_n)| = 3n - 1.$$

Jadi,

$$p(I_n) + q(I_n) = 3n + 3n - 1 = 6n - 1$$

Penelitian ini mengkonstruksi label simpul yaitu $f(x_i), f(y_i)$, dan $f(z_i)$ serta label sisi yaitu $f(x_iy_i), f(y_iy_{i+1})$, dan $f(z_iy_i)$. Selanjutnya adalah membuktikan apakah pelabelan graf ulat I_n dengan $x_1 = 1$ adalah pelabelan sisi ajaib super untuk *n* berapapun. Untuk mendapatkan fungsi yang tepat maka pembahasan untuk graf I_n dibagi menjadi dua permasalahan, yaitu untuk *n* ganjil dan *n* genap. Hal ini bertujuan agar fungsi dapat dikonstruksikan dengan baik.

Definisikan fungsi *f* dari $V(I_n) \cup E(I_n)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, 6n - 1\}$ sebagai berikut:

a. Fungsi label simpul untuk *n* Bilangan Asli Ganjil

Adapun fungsi label simpulnya adalah sebagai berikut:

$$f(v) = \begin{cases} \frac{3i-1}{2}, & \text{untuk } v \in X \text{ dan } i \text{ ganjil} \\ \frac{3n+3i-1}{2}, & \text{untuk } v \in X \text{ dan } i \text{ genap} \\ \frac{3n+3i}{2}, & \text{untuk } v \in Y \text{ dan } i \text{ ganjil} \\ \frac{3i}{2}, & \text{untuk } v \in Y \text{ dan } i \text{ genap} \\ \frac{3i+1}{2}, & \text{untuk } v \in Z \text{ dan } i \text{ ganjil} \\ \frac{3n+3i+1}{2}, & \text{untuk } v \in Z \text{ dan } i \text{ genap} \end{cases}$$

b. Fungsi label simpul untuk *n* Bilangan Asli Genap

Adapun fungsi label simpulnya adalah sebagai berikut:

$$f(v) = \begin{cases} \frac{3i-1}{2}, & \text{untuk } v \in X \text{ dan } i \text{ ganjil} \\ \frac{3n+3i-2}{2}, & \text{untuk } v \in X \text{ dan } i \text{ genap} \\ \frac{3n+3i-1}{2}, & \text{untuk } v \in Y \text{ dan } i \text{ ganjil} \\ \frac{3i}{2}, & \text{untuk } v \in Y \text{ dan } i \text{ genap} \\ \frac{3i+1}{2}, & \text{untuk } v \in Z \text{ dan } i \text{ ganjil} \\ \frac{3n+3i}{2}, & \text{untuk } v \in Z \text{ dan } i \text{ genap} \end{cases}$$

c. Fungsi label sisi

Adapun fungsi label sisi baik untuk *n* bilangan asli ganjil maupun *n* bilangan asli genap adalah sebagai berikut:

$$f(y_i y_{i+1}) = 6n - 3i \quad \text{dengan } 1 \le i \le n - 1$$
$$f(x_i y_i) = 6n - 3i + 2 \quad \text{dengan } 1 \le i \le n$$
$$f(y_i z_i) = 6n - 3i + 1 \quad \text{dengan } 1 \le i \le n.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa fungsi label simpul dan label sisi tersebut adalah fungsi bijektif dari $V(I_n) \cup E(I_n)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, 6n - 1\}$. Berdasarkan Lemma 1 maka membuktikan bahwa *f* merupakan fungsi bijektif cukup ditunjukkan bahwa *f* fungsi monoton, sebagai berikut:

a. Label simpul dengan *n* ganjil

$f(v) = \frac{3i - 1}{2}$, untuk $v \in X$ dan *i* ganjil.

Akan ditunjukkan bahwa *f* adalah fungsi monoton. Karena

$$f(x_{i+2}) - f(x_i) = \frac{3(i + 2) - 1}{2} - \frac{3i - 1}{2} = 3 > 0$$

maka $f(x_{i+2}) > f(x_i)$ untuk *i* ganjil dan $1 \le i \le n$, sehingga $f(v)$ adalah fungsi monoton naik.

b. Label simpul dengan *n* genap

$f(v) = \frac{3n + 3i - 2}{2}$, untuk $v \in X$ dan *i* genap.

Akan ditunjukkan bahwa *f* adalah fungsi monoton. Karena

$$f(x_{i+2}) - f(x_i) = \frac{3n + 3(i + 2) - 2}{2} - \frac{3n + 3i - 2}{2} = 3 > 0$$

maka $f(x_{i+2}) > f(x_i)$ untuk *i* genap dan $1 \le i \le n$, sehingga $f(x_i)$ adalah fungsi monoton naik.

c. Label sisi

$f(y_i z_i) = 6n - 3i + 1, \quad$ untuk $1 \leq i \leq n$.

Akan ditunjukkan bahwa f adalah fungsi monoton. Karena

$f(y_{i+1}z_{i+1}) - f(y_i z_i) = 6n - 3(i+1) + 1 - (6n - 3i + 1) = -3 < 0$

maka $f(y_{i+1}z_{i+1}) < f(y_i z_i)$ untuk $1 \leq i \leq n$, sehingga $f(y_i z_i)$ adalah fungsi monoton turun.

Pembuktian ini analog untuk label simpul yang lain dan sisi pada I_n dengan n bilangan asli. Karena fungsi tersebut adalah fungsi monoton murni, maka fungsi tersebut memiliki fungsi balikan (invers). Selanjutnya dapat disimpulkan bahwa fungsi yang telah telah dikonstruksi adalah fungsi bijektif karena sebuah fungsi adalah bijektif jika dan hanya jika memiliki fungsi invers. Selanjutnya menentukan bilangan ajaib $k = f(x) + f(xy) + f(y)$ dengan xy adalah sebarang sisi di graf ulat I_n sebagai berikut:

a. Untuk n Bilangan Asli Ganjil

Adapun perhitungannya adalah sebagai berikut:

Untuk $1 \leq i \leq n$ dan i ganjil, diperoleh

$$f(y_i) + f(y_i y_{i+1}) + f(y_{i+1}) = \frac{3n+3i}{2} + 6n - 3i + \frac{3(i+1)}{2} = \frac{15n+3}{2}$$

$$f(x_i) + f(x_i y_i) + f(y_i) = \frac{3i-1}{2} + 6n - 3i + 2 + \frac{3n+3i}{2} = \frac{15n+3}{2}$$

$$f(y_i) + f(y_i z_i) + f(z_i) = \frac{3n+3i}{2} + 6n - 3i + 1 + \frac{3i+1}{2} = \frac{15n+3}{2}.$$

Untuk $1 \leq i \leq n$ dan i genap, diperoleh

$$f(y_i) + f(y_i y_{i+1}) + f(y_{i+1}) = \frac{3i}{2} + 6n - 3i + \frac{3n+3(i+1)}{2} = \frac{15n+3}{2}$$

$$f(x_i) + f(x_i y_i) + f(y_i) = \frac{3n+3i-1}{2} + 6n - 3i + 2 + \frac{3i}{2} = \frac{15n+3}{2}$$

$$f(y_i) + f(y_i z_i) + f(z_i) = \frac{3i}{2} + 6n - 3i + 1 + \frac{3n+3i+1}{2} = \frac{15n+3}{2}.$$

Dengan demikian diperoleh bahwa graf ulat I_n adalah total sisi ajaib pada n bilangan asli ganjil dengan bilangan ajaib

$$k = \frac{15n+3}{2}.$$

b. Untuk n Bilangan Asli Genap

Adapun perhitungannya adalah sebagai berikut:

Untuk $1 \leq i \leq n$ dan i ganjil, diperoleh

$$f(y_i) + f(y_i y_{i+1}) + f(y_{i+1}) = \frac{3n+3i-1}{2} + 6n - 3i + \frac{3(i+1)}{2} = \frac{15n+2}{2}$$

$$f(x_i) + f(x_i y_i) + f(y_i) = \frac{3i-1}{2} + 6n - 3i + 2 + \frac{3n+3i-1}{2} = \frac{15n+2}{2}$$

$$f(y_i) + f(y_i z_i) + f(z_i) = \frac{3n+3i-1}{2} + 6n - 3i + 1 + \frac{3i+1}{2} = \frac{15n+2}{2}.$$

Untuk $1 \leq i \leq n$ dan i genap, diperoleh

$$f(y_i) + f(y_i y_{i+1}) + f(y_{i+1}) = \frac{3i}{2} + 6n - 3i + \frac{3n+3(i+1)-1}{2} = \frac{15n+2}{2}$$

$$f(x_i) + f(x_i y_i) + f(y_i) = \frac{3n+3i-2}{2} + 6n - 3i + 2 + \frac{3i}{2} = \frac{15n+2}{2}$$

$$f(y_i) + f(y_i z_i) + f(z_i) = \frac{3i}{2} + 6n - 3i + 1 + \frac{3n+3i}{2} = \frac{15n+2}{2}.$$

Dengan demikian diperoleh bahwa graf ulat I_n adalah total sisi ajaib pada n bilangan asli genap dengan bilangan ajaib

$$k = \frac{15n+2}{2}.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa f merupakan pelabelan sisi ajaib super, sehingga dibentuk relasi f_1. Kemudian dibuktikan bahwa f_1 merupakan fungsi dari $V(I_n)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, 3n\}$ baik untuk n bilangan asli ganjil maupun n bilangan asli genap.

Ambil sebarang $v_1, v_2 \in V(I_n)$ dengan $v_1 = v_2$

akan ditunjukkan $v_1 = v_2 \Rightarrow f(v_1) = f(v_2)$

a. Untuk $v \in X$ dan i bilangan asli ganjil

   Untuk $v_1 \in X$, berarti ada $i \in X$ sehingga $v_1 = x_i$

$$f(v_1) = f(x_i) = \frac{3i-1}{2},$$

   untuk $v_2 \in X$, berarti ada $j \in X$ sehingga $v_2 = x_j$

$$f(v_2) = f(x_j) = \frac{3j-1}{2}.$$

   Karena $x_i = x_j$, maka $\frac{3i-1}{2} = \frac{3j-1}{2}$ sedemikian sehingga $f(x_i) = f(x_j)$.

b. Untuk $v \in X$, n bilangan asli ganjil dan i bilangan asli genap

   Untuk $v_1 \in X$, berarti ada $i \in X$ sehingga $v_1 = x_i$

$$f(v_1) = f(x_i) = \frac{3n+3i-1}{2},$$

   untuk $v_2 \in X$, berarti ada $j \in X$ sehingga $v_2 = x_j$

$$f(v_2) = f(x_j) = \frac{3n+3j-1}{2}.$$

   Karena $x_i = x_j$, maka $\frac{3n+3i-1}{2} = \frac{3n+3j-1}{2}$ sedemikian sehingga $f(x_i) = f(x_j)$.

Pembuktian ini analog untuk label simpul yang lain pada I_n dengan n bilangan asli. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa f_1 memetakan $V(I_n)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, 3n\}$. Karena f_1 memetakan $V(I_n)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, 3n\}$ maka fungsi tersebut adalah pelabelan sisi ajaib super. Sehingga dapat disimpulkan bahwa graf ulat I_n adalah graf sisi ajaib super, untuk semua n bilangan asli.

PENUTUP

Dari fungsi yang telah dikonstruksi, yaitu label simpul $f(x_i), f(y_i)$, dan $f(z_i)$ serta label sisi $f(x_i y_i), f(y_i y_{i+1})$, dan $f(z_i y_i)$ dapat ditunjukkan bahwa fungsi tersebut adalah pelabelan total sisi ajaib karena merupakan fungsi bijektif dan memiliki bilangan ajaib yaitu $k = \frac{15n+3}{2}$ dan $k = \frac{15n+2}{2}$ masing-masing untuk n bilangan asli ganjil dan n bilangan asli genap. Fungsi tersebut juga memetakan $V(I_n)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, 3n\}$, sehingga dapat disimpulkan bahwa fungsi yang telah dikonstruksi merupakan pelabelan sisi ajaib super. Dengan demikian graf ulat I_n adalah graf sisi ajaib super karena terdapat pelabelan sisi ajaib super pada graf tersebut, baik untuk n bilangan asli ganjil maupun n bilangan asli genap.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Gallian JA. A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*. 2012; 19: 82-100.

[2]. Wallis WD, Baskoro ET, Miller M, Slamin. Edge-Magic Total labeling. *Australasian Journal of Combinatorics*. 2000; 22: 177-190.

[3]. Enomoto H, Llado AS, Nakamigawa T, Ringel G.Super Edge-Magic Graphs. *Journal of Mathematics*. 1998; 34(2): 105-109.

[4]. Xu K, Das KC. Trees, Unicyclic, and Bicyclic Graphs Extremal with Respect to Multiplicative Sum Zagreb Index. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*. 2012; 68: 257-272.

[5]. Fulks W. *Advanced Calculus An Introduction to Analysis*. New York: John Wiley and Sons, Inc; 1961.

[6]. Abdussakir. Super Edge-Magic Labeling pada Graf Ulat dengan Himpunan Derajat {1, 4} dan n Titik Berderajat 4. *Journal Cauchy*. 2009; 1: 1-6.

OKKI DARMAWAN : Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Tanjungpura Pontianak, okdarmawan@rocketmail.com

NILAMSARI KUSUMASTUTI : Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Tanjungpura Pontianak, uminilam@yahoo.com

YUNDARI : Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Tanjungpura Pontianak, yuendha@yahoo.com